

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

## ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΡΩΤΗΣ ΡΟΗΣ

### ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

|                                        |                                                                                       |
|----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Εισαγωγικές παρατηρήσεις και παραδοχές |                                                                                       |
| <b>12.1</b>                            | <b>ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ</b> ..... 12.3                                                   |
| <b>12.2</b>                            | <b>ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΟΡΜΗΣ (ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER - STOKES)</b> ..... 12.4                         |
| 12.2.1                                 | Απόδειξη της εξίσωσης ορμής ..... 12.4                                                |
| 12.2.2                                 | Ειδικές μορφές της εξίσωσης ορμής ..... 12.8                                          |
| 12.2.3                                 | Παραβολικοποιημένες εξισώσεις Navier-Stokes..... 12.9                                 |
| <b>12.3</b>                            | <b>ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ</b> ..... 12.10                                                  |
| 12.3.1                                 | Απόδειξη της εξίσωσης ενέργειας..... 12.10                                            |
| 12.3.2                                 | Ειδικές μορφές της εξίσωσης ενέργειας..... 12.13                                      |
| <b>12.4</b>                            | <b>ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΤΡΩΤΗΣ ΡΟΗΣ</b> ..... 12.15                   |
| 12.4.1                                 | Περιπτώσεις πραγματικής στρωτής ροής ..... 12.15                                      |
| 12.4.2                                 | Το πλήρες σύστημα εξισώσεων στρωτής ροής (δισδιάστατη ροή)..... 12.15                 |
| 12.4.3                                 | Άλλες περιπτώσεις ροής πέραν της στρωτής μονοφασικού και ομογενούς ρευστού..... 12.16 |
| <b>12.5</b>                            | <b>ΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ</b> ..... 12.17                                                |
| 12.5.1                                 | Η ταυτοποίηση του κάθε ρευστού..... 12.17                                             |
| 12.5.2                                 | Ιξώδες..... 12.17                                                                     |
| 12.5.3                                 | Η θερμική αγωγιμότητα ..... 12.20                                                     |
| 12.5.4                                 | Ισεντροπικός εκθέτης και ειδική θερμοχωρητικότητα ..... 12.21                         |

|              |                                                                                                                      |       |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 12.5.5       | Συντελεστής πραγματικού αερίου (συμπιεστότητα) .....                                                                 | 12.22 |
| 12.5.6       | Συντελεστής διάχυσης – Νόμος του Fick .....                                                                          | 12.23 |
| <b>12.6</b>  | <b>ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ</b> .....                                                                        | 12.24 |
| <b>12.7</b>  | <b>ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΟΡΜΗΣ (NAVIER-STOKES)</b> .....                                                     | 12.25 |
| 12.7.1       | Στρωτή ροή ανάμεσα σε παράλληλες πλάκες .....                                                                        | 12.26 |
| 12.7.2       | Στρωτή δισδιάστατη ροή μεταξύ σταθερής και κινούμενης πλάκας (Ροή Couette) .....                                     | 12.27 |
| 12.7.3       | Στρωτή αξονοσυμμετρική ροή σε αγωγό (Ροή Hagen-Poiseuille) .....                                                     | 12.28 |
| <b>12.8</b>  | <b>ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ</b> .....                                                              | 12.30 |
| 12.8.1       | Ροή σε επίπεδο αγωγό (στρωτή δισδιάστατη ροή μεταξύ δύο πλακών) .....                                                | 12.30 |
| 12.8.2       | Κατανομή θερμοκρασίας σε ροή Couette .....                                                                           | 12.31 |
| <b>12.9</b>  | <b>ΑΔΙΑΣΤΑΤΗ ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ</b> .....                                                               | 12.33 |
| 12.9.1       | Αδιάστατη μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes .....                                                                    | 12.33 |
| 12.9.2       | Αδιάστατη εξίσωση της ενέργειας .....                                                                                | 12.35 |
| 12.9.3       | Αδιάστατη καταστατική εξίσωση .....                                                                                  | 12.35 |
| <b>12.10</b> | <b>ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΡΟΗΣ ΣΕ ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ</b> .....                                        | 12.35 |
| 12.10.1      | Οι εξισώσεις συνέχειας, ορμής και ενέργειας σε συντηρητική μορφή .....                                               | 12.35 |
| 12.10.2      | Οι συντηρητικές εξισώσεις σε διανυσματική μορφή .....                                                                | 12.37 |
| <b>12.11</b> | <b>ΣΥΝΔΕΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ (ΙΔΕΩΔΟΥΣ) ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΡΟΗΣ</b> .....                                                       | 12.39 |
| 12.11.1      | Στροβιλότητα και τριβή .....                                                                                         | 12.39 |
| 12.11.2      | Στροβιλότητα και εντροπία – Σχέση των Crocco-Vaszonyi .....                                                          | 12.40 |
| 12.11.3      | Σύνθεση ιδεώδους και πραγματικού ροϊκού πεδίου .....                                                                 | 12.42 |
| <b>12.12</b> | <b>ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ</b> .....                                                                      | 12.44 |
| 12.12.1      | Ο ρόλος των χαρακτηριστικών αριθμών και συντελεστών στην ομοιότητα και τον χαρακτηρισμό των ροϊκών πεδίων .....      | 12.44 |
| 12.12.2      | Αδιάστατοι αριθμοί από τις εξισώσεις Navier-Stokes και Ενέργειας και εφαρμογές τους σε καθορισμένα ροϊκά πεδία ..... | 12.45 |
| <b>12.13</b> | <b>ΘΕΩΡΙΑ ΛΙΠΑΝΣΗΣ ΚΑΙ ΕΡΠΟΥΣΕΣ ΡΟΕΣ (ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΡΟΗΣ STOKES)</b> .....                                              | 12.52 |
| 12.13.1      | Εξισώσεις της έρπουσας ροής – Ροή Χιλ-Σω (Hele-Shaw) .....                                                           | 12.52 |
| 12.13.2      | Έρπουσα ροή γύρω από σώματα – Ροή Stokes και Ροή Oseen .....                                                         | 12.54 |
| 12.13.3      | Λίπανση εδράνων - Εσωτερική έρπουσα ροή .....                                                                        | 12.55 |
| 12.13.4      | Ροή λίπανσης σε έδρανο ολίσθησης – Θεωρίες του Sommerfeld και του Reynolds .....                                     | 12.59 |

## Εισαγωγικές παρατηρήσεις και παραδοχές

Στη μέχρι τώρα θεώρηση της ροής ρευστών έγιναν στις διάφορες περιπτώσεις ειδικοί περιορισμοί, όπως μόνιμη ροή, μονοδιάστατη ροή, ροή χωρίς τριβή, ροή μονοδιάστατη με τριβή κλπ. Σε πραγματικές περιπτώσεις η ροή είναι με λίγες εξαιρέσεις τρισδιάστατη και μη-μόνιμη, άλλοτε στρωτή, άλλοτε τυρβώδης ή μεταβατική και όλα τα ρευστά παρουσιάζουν τριβή και θερμική αγωγιμότητα. Στις μεγάλες ταχύτητες γίνονται συμπιεστά και τα ροϊκά πεδία παρουσιάζουν διαφορές θερμοκρασίας και πυκνότητας. Τη ροή των πραγματικών ρευστών περιγράφουν γενικά, όπως και στη μονοδιάστατη ροή, οι εξισώσεις διατήρησης της συνέχειας, ορμής και ενέργειας, οι οποίες όμως λαμβάνονται για όλες τις διαστάσεις του θεωρουμένου συστήματος συντεταγμένων και περιλαμβάνουν την επίδραση τριβής και μεταφοράς θερμότητας. Μερικές από τις εξισώσεις αυτές, οι οποίες καλούνται επίσης εξισώσεις διατήρησης, έχουν καταστρωθεί και επεξηγηθεί ήδη σε προηγούμενα κεφάλαια, π.χ. Κεφάλαιο 7 και 10.